Тема 1. Ансамбли и вероятности. Байесовский вывод

Ансамбль X – это тройка (x, A_x, P_x), где исход x – это значение некоторой случайной величины, принимающей одно из набора возможных значений $A_x = \{a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_I\}$ с вероятностями $P_x = \{p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_I\}$.

$$P(x = a_i) = p_i,\ p_i \geq 0,\ \sum_{a_i \in A_x} P(x = a_i) = 1.$$

Если T – подмножество A_x, тогда

$$P(T) = P(x \in T) = \sum_{a_i \in T} P(x = a_i).$$

Совместный ансамбль XY – это ансамбль, каждый исход которого представляет собой упорядоченную пару (x, y), в которой $x \in A_x = \{a_1, a_2, ..., a_I\}$, а $y \in A_y = \{b_1, b_2, ..., b_J\}$.

Будем называть вероятность $P(x, y)$ *совместной вероятностью* x и y. В такой записи запятая опциональна, поэтому $P(x, y)$ и $P(xy)$ суть одно и то же. Следует обратить внимание, что случайные величины x и y, входящие в ансамбль XY могут не быть независимыми.

Вероятности отдельных величин $P(x)$ и $P(y)$, входящих в ансамбль определяются через совместные вероятности как

$$P(x = a_i) = \sum_{b_j \in A_Y} P(x = a_i, y = b_j),$$

$$P(y) = \sum_{y \in A_Y} P(x, y).$$

Вероятность того, что x равно a_i при условии, что $y = b_j$ называется условной вероятностью, обозначается и определяется следующим образом:

$$P(x = a_i \mid y = b_j) = \frac{P(x = a_i, y = b_j)}{P(y = b_j)} \text{ при } P(y = b_j) \neq 0$$

Правило умножения:

$$P(x,y) = P(x \mid y)P(y) = P(y \mid x)P(x).$$

Правило суммирования:

$$P(x) = \sum_y P(x,y) = \sum_y P(x \mid y)P(y).$$

Теорема Байеса

$$P(y \mid x) = \frac{P(x \mid y)P(y)}{P(x)} = \frac{P(x \mid y)P(y)}{\sum_{y'} P(x \mid y')P(y')}.$$

Независимость

Две случайные величины X и Y независимы ($X \perp Y$) тогда и только тогда, когда

$$P(x,y) = P(x)P(y).$$

Математическое ожидание случайной величины.

Дискретный случай:

$$MX = \sum_i x_i p_i \,.$$

Непрерывный случай:

$$MX = \int_{x=-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \,.$$

Дисперсия случайной величины.

Дискретный случай:

$$DX = \sum_i (x_i - MX)^2 \, p_i \,.$$

Непрерывный случай:

$$DX = \int_{x=-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 \, f(x)dx \,,$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2.$$

Задача 1.1

Вычислить дисперсию и математическое ожидание дискретной случайной величины с заданным законом распределения (см. варианты).

Варианты заданий:

1) Бернулли (параметр p) – успех (или провал) в одиночном испытании:

$$p(x)=\begin{cases} p, & k=1, \\ 1-p, & k=0. \end{cases}$$

2) Биномиальный закон распределения (параметры p и n) –число успехов в n независимых испытаниях Бернулли.

$$p(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k=0,...,n.$$

3) Геометрическое распределение (параметр p) – число попыток до первого успеха

$$p(k)=(1-p)^{k-1} p, \qquad k=1,...,n,...$$

Задача 1.2

Вычислить дисперсию и математическое ожидание непрерывной случайной величины с заданным законом распределения (см. варианты).

Варианты заданий:

1) Равномерный закон распределения на интервале [a,b]

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<a \\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 0, & x>b, \end{cases}$$

2) Экспоненциальный закон распределения:

$$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0. \end{cases},$$

3) Нормальный закон распределения.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Задача 1.3

Дано произведение ансамблей XY (см. варианты). Определить, являются ли ансамбли X и Y независимыми, вычислить вероятности $p(x_i), p(y_j), p(x_i \mid y_j), p(y_j \mid x_i)$.

Варианты заданий:

1) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_2y_1 & x_2y_2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}$.

2) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_2y_1 & x_2y_2 \\ 0,3 & 0,45 & 0,2 & 0,05 \end{bmatrix}$.

3) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_2y_1 & x_2y_2 \\ 0,45 & 0,3 & 0,15 & 0,1 \end{bmatrix}$.

4) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_2y_1 & x_2y_2 \\ 0,15 & 0,05 & 0,6 & 0,2 \end{bmatrix}$.

5) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_2y_1 & x_2y_2 \\ 0,63 & 0,07 & 0,27 & 0,03 \end{bmatrix}$.

6) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_2y_1 & x_2y_2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}$.

7) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ 0,05 & 0,15 & 0,2 & 0,075 & 0,225 & 0,3 \end{bmatrix}$.

8) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_1y_3 \\ 0,25 & 0,05 & 0,2 & 0,25 & 0,2 & 0,05 \end{bmatrix}$.

9) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_3y_1 & x_3y_2 \\ 0,35 & 0,15 & 0,14 & 0,06 & 0,21 & 0,09 \end{bmatrix}$.

10) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_3y_1 & x_3y_2 \\ 0,04 & 0,16 & 0,02 & 0,08 & 0,14 & 0,56 \end{bmatrix}$.

11) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_1y_3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,05 & 0,05 \end{bmatrix}$.

12) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_3y_1 & x_3y_2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}$.

13) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_1y_3 \\ 0,12 & 0,3 & 0,18 & 0,08 & 0,2 & 0,12 \end{bmatrix}$.

14) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,3 & 0,15 & 0,15 \end{bmatrix}$.

Решение задачи 1.3 (вариант 1)

$$XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_2y_1 & x_2y_2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Вероятности событий ансамбля X определяются как суммы соответствующих вероятностей ансамбля XY:

$$p(x_i) = \sum_j p(x_i y_j),$$

$$p(x_1) = \sum_{j=1}^{2} p(x_1 y_j) = 0,4 + 0,3 = 0,7,$$

$$p(x_2) = 0,2 + 0,1 = 0,3.$$

Аналогично определяются вероятности событий ансамбля Y

$$p(y_1) = \sum_{i=1}^{2} p(x_i y_1) = 0,4 + 0,2 = 0,6,$$

$$p(y_2) = 0,3 + 0,1 = 0,4.$$

Таким образом:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0,7 & 0,3 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

Определим, являются ли ансамбли независимыми. Для этого проверим выполнение равенства

$$p(x_i y_j) = p(x_i)\, p(y_j).$$

Если это равенство выполняется для всех возможных комбинаций событий ансамблей X и Y, то ансамбли независимы, иначе – зависимы.

$$p(x_1)\,p(y_1) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42 \neq p(x_1 y_1).$$

Поскольку равенство не выполняется, ансамбли зависимы.

Теперь рассчитаем условные вероятности, исходя из определения условной вероятности:

$$p(x_i \mid y_j) = \frac{p(x_i y_j)}{p(y_j)}.$$

$$p(x_1 \mid y_1) = \frac{p(x_1 y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{2}{3}, \quad p(x_1 \mid y_2) = \frac{p(x_1 y_2)}{p(y_2)} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{4},$$

$$p(x_2 \mid y_1) = \frac{p(x_2 y_1)}{p(y_2)} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}, \quad p(x_2 \mid y_2) = \frac{p(x_2 y_2)}{p(y_2)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично,

$$p(y_j \mid x_i) = \frac{p(x_i y_j)}{p(x_i)},$$

$$p(y_1 \mid x_1) = \frac{p(x_1 y_1)}{p(x_1)} = \frac{0{,}4}{0{,}7} = \frac{4}{7}, \quad p(y_1 \mid x_2) = \frac{p(x_2 y_1)}{p(x_2)} = \frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{2}{3},$$

$$p(y_2 \mid x_1) = \frac{p(x_1 y_2)}{p(x_1)} = \frac{0{,}3}{0{,}7} = \frac{3}{7}, \quad p(y_2 \mid x_2) = \frac{p(x_2 y_2)}{p(x_2)} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3}.$$

Тема 2. Энтропия

Предположим, что задан дискретный вероятностный ансамбль $\{Z, p(z)\}$ с N возможными состояниями и заданным на нём распределением вероятностей $p(z_i)$ таким, что для всех $i = \overline{1, N}$ $p(z_i) \geq 0$, а $\sum p(z_i) = 1$:

$$Z = \begin{bmatrix} z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots, z_N \\ p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_N \end{bmatrix},$$

Информационная двоичная энтропия $H(Z)$ для этого ансамбля рассчитывается следующим образом:

$$H(Z) = -\sum_{i=1}^{N} p(z_i) \log_a p(z_i).$$

Если заданы два дискретных ансамбля $\{Z, p(z)\}$ и $\{V, p(v)\}$: $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_N\}$ и $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_K\}$, помимо энтропии для каждого из этих ансамблей можно определить их совместную энтропию:

$$H(ZV) = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{K} p(z_i v_j) \log_2 p(z_i v_j),$$

а также частные условные энтропии

$$H_{v_j}(Z) = -\sum_{i=1}^{N} p(z_i \mid v_j) \log_2 p(z_i \mid v_j),$$

$$H_{z_i}(V) = -\sum_{j=1}^{K} p(v_j \mid z_i) \log_2 p(v_j \mid z_i),$$

и соответствующие им полные условные энтропии

$$H_V(Z) = \sum_{j=1}^{K} p(v_j) H_{v_j}(Z) = -\sum_{j=1}^{K} p(v_j) \sum_{i=1}^{N} p(z_i \mid v_j) \log_2 p(z_i \mid v_j),$$

$$H_Z(V) = \sum_{i=1}^{N} p(z_i) H_{z_i}(V) = -\sum_{i=1}^{N} p(z_i) \sum_{j=1}^{K} p(v_j \mid z_i) \log_2 p(v_j \mid z_i).$$

Существует ряд выражений, описывающих связь между приведёнными величинами, основным из которых является следующее:

$$H(ZV) = H(Z) + H_Z(V) = H_V(Z) + H(V).$$

Следует отметить, что для независимых случайных величин Z и V выполняются равенства $H(V) = H_Z(V)$ и $H(Z) = H_V(Z)$, из чего следует, что

$H(ZV) = H(Z) + H(V)$ (только для независимых величин).

Для непрерывных величин вместо энтропии вычисляется, так называемая, дифференциальная энтропия $h(Z)$

$$h(Z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\log_2 f(z)dz,$$

где $f(z)$ – плотность вероятности случайной величины Z.

Для двух непрерывных случайных величин также может быть определена совместная дифференциальная энтропия и условная дифференциальная энтропия:

$$h(ZV) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z,v)\log_2 f(z,v)dzdv,$$

$$h_Z(V) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z,v)\log_2 \frac{f(z,v)}{f(z)}dzdv =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\int_{-\infty}^{+\infty} f(v\,|\,z)\log_2 f(v\,|\,z)dzdv$$

$$h(ZV) = h(Z) + h_Z(V) = h(V) + h_V(Z).$$

Задача 2.1

Вероятности появления сообщений дискретного ансамбля X равны

$$p(x_1) = 1/4,\ p(x_2) = 1/2,\ p(x_3) = 1/4.$$

При этом условные вероятности появления сообщений ансамбля Y

$p(y_1 | x_1) = p(y_2 | x_1) = {}^1\!/_2$; $p(y_3 | x_1) = p(y_4 | x_1) = 0$;

$p(y_1 | x_2) = 0$; $p(y_2 | x_2) = {}^1\!/_2$; $p(y_3 | x_2) = p(y_4 | x_2) = {}^1\!/_4$;

$p(y_1 | x_3) = p(y_3 | x_3) = 0$; $p(y_2 | x_3) = p(y_4 | x_3) = {}^1\!/_2$.

Вычислить $H(X)$, $H(Y)$, $H(XY)$, $H_Y(X)$, $H_X(Y)$.

Решение задачи 2.1

Для нахождения энтропии ансамбля X есть все необходимые вероятности:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} p(x_i)\log_2 p(x_i) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i)\log_2 p(x_i) = $$
$$= -\left(\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}.$$

Найдём вероятности появления сообщений ансамбля Y :

$$p(y_j) = \sum_i p(x_i y_j) = \sum_i p(y_j | x_i)\, p(x_i)$$

$$p(y_1) = \sum_i p(x_i y_1) = \sum_i p(x_i)\, p(y_1 | x_i) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{1}{8};$$

$$p(y_2) = \sum_i p(x_i y_2) = \sum_i p(x_i)\, p(y_2 | x_i) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$p(y_3) = \sum_i p(x_i y_3) = \sum_i p(x_i)\, p(y_3 | x_i) = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{1}{8};$$

$$p(y_4) = \sum_i p(x_i y_4) = \sum_i p(x_i)\, p(y_4 | x_i) = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$H(Y) = -\sum_j p(y_j)\log_2 p(x_j) = -\sum_{j=1}^{4} p(y_j)\log_2 p(y_j) = $$
$$= -\left(\frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4}$$

Для вычисления энтропии совместного ансамбля необходимо знать вероятности событий $P\left(x_i y_j\right)$.

$p\left(x_i y_j\right) = p\left(y_j \mid x_i\right) p\left(x_i\right)$.

Для упрощения записи выпишем вероятности только для событий с ненулевой вероятностью:

$$XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_2y_2 & x_2y_3 & x_2y_4 & x_3y_2 & x_3y_4 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix},$$

$$H\left(XY\right) = -\sum_i \sum_j p\left(x_i y_j\right) \log_2 p\left(x_i y_j\right) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{4} p\left(x_i y_j\right) \log_2 p\left(x_i y_j\right) =$$

$$= -\left(6 \cdot \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{4}$$

Для нахождения полной условной энтропии $H_X\left(Y\right)$ есть все необходимые вероятности, поскольку

$$H_X\left(Y\right) = \sum_{i=1}^{3} p\left(x_i\right) H_{x_i}\left(Y\right) = -\sum_{i=1}^{3} p\left(x_i\right) \sum_{j=1}^{4} p\left(y_j \mid x_i\right) \log_2 p\left(y_j \mid x_i\right).$$

Вычислим отдельно каждую частную условную энтропию:

$$H_{x_1}\left(Y\right) = -\sum_{j=1}^{4} p\left(y_j \mid x_1\right) \log_2 p\left(y_j \mid x_1\right) = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = 1,$$

$$H_{x_2}\left(Y\right) = -\sum_{j=1}^{4} p\left(y_j \mid x_2\right) \log_2 p\left(y_j \mid x_2\right) = \frac{3}{2},$$

$$H_{x_3}\left(Y\right) = -\sum_{j=1}^{4} p\left(y_j \mid x_3\right) \log_2 p\left(y_j \mid x_3\right) = 1.$$

Полная условная энтропия вычисляется как

$$H_X\left(Y\right) = \sum_{i=1}^{3} p\left(x_i\right) H_{x_i}\left(Y\right) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{5}{4}.$$

Для нахождения полной условной энтропии необходимо вычислить условные вероятности $p\left(x_i \mid y_j\right)$:

$$p\left(x_1 \mid y_1\right)=\frac{p\left(x_1 y_1\right)}{p\left(y_1\right)}=\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{1}=1,\; p\left(x_1 \mid y_2\right)=\frac{p\left(x_1 y_2\right)}{p\left(y_2\right)}=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{1}=\frac{1}{4},$$

$$p\left(x_1 \mid y_3\right)=\frac{p\left(x_1 y_3\right)}{p\left(y_3\right)}=0\cdot\frac{8}{1}=0,\; p\left(x_1 \mid y_4\right)=\frac{p\left(x_1 y_4\right)}{p\left(y_4\right)}=0\cdot\frac{4}{1}=0,$$

$$p\left(x_2 \mid y_1\right)=\frac{p\left(x_2 y_1\right)}{p\left(y_1\right)}=0\cdot\frac{8}{1}=0,\; p\left(x_2 \mid y_2\right)=\frac{p\left(x_2 y_2\right)}{p\left(y_2\right)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}=\frac{1}{2},$$

$$p\left(x_2 \mid y_3\right)=\frac{p\left(x_2 y_3\right)}{p\left(y_3\right)}=\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{1}=1,\; p\left(x_2 \mid y_4\right)=\frac{p\left(x_2 y_4\right)}{p\left(y_4\right)}=\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{1}=\frac{1}{2},$$

$$p\left(x_3 \mid y_1\right)=\frac{p\left(x_3 y_1\right)}{p\left(y_1\right)}=0\cdot\frac{8}{1}=0,\; p\left(x_3 \mid y_2\right)=\frac{p\left(x_3 y_2\right)}{p\left(y_2\right)}=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{1}=\frac{1}{4},$$

$$p\left(x_3 \mid y_3\right)=\frac{p\left(x_3 y_3\right)}{p\left(y_3\right)}=0\cdot\frac{8}{1}=0,\; p\left(x_3 \mid y_4\right)=\frac{p\left(x_3 y_4\right)}{p\left(y_4\right)}=\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{1}=\frac{1}{2}.$$

Теперь полная условная энтропия находится аналогично предыдущей:

$$H_{y_1}\left(X\right)=-\sum_{i=1}^{3} p\left(x_i \mid y_1\right)\log_2 p\left(z_i \mid v_1\right)=0,$$

$$H_{y_1}\left(X\right)=-\sum_{i=1}^{3} p\left(x_i \mid y_1\right)\log_2 p\left(z_i \mid v_1\right)=\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{3}{2},$$

$$H_{y_1}\left(X\right)=-\sum_{i=1}^{3} p\left(x_i \mid y_1\right)\log_2 p\left(z_i \mid v_1\right)=0,$$

$$H_{y_1}\left(X\right)=-\sum_{i=1}^{3} p\left(x_i \mid y_1\right)\log_2 p\left(z_i \mid v_1\right)=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1=1,$$

$$H_Y\left(X\right)=\sum_{j=1}^{4} p\left(y_j\right)H_{y_1}\left(X\right)=\frac{1}{8}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{8}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 1=1.$$

Можно проверить, что полученные разными способами ответы совпадают:

$$H\left(XY\right)=-\sum_i\sum_j p\left(x_i y_j\right)\log_2 p\left(x_i y_j\right)=\frac{11}{4}.$$

$$H\left(XY\right)=H\left(X\right)+H_X\left(Y\right)=\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=\frac{11}{4},$$

$$H\left(XY\right)=H_Y\left(X\right)+H\left(Y\right)=1+\frac{7}{4}=\frac{11}{4}.$$

Задача 2.2

Энтропия для ансамбля A с заданными вероятностями событий

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

равна H_a

a) Выразить через H_a энтропию ансамбля X со следующими вероятностями:

$$X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{p}{2} & \frac{p}{2} & \frac{1-p}{2} & \frac{1-p}{2} \end{bmatrix}.$$

b) Выразить через H_a энтропию ансамбля Y со следующими вероятностями:

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \frac{p}{2} & \frac{p}{2} & 1-p \end{bmatrix}.$$

c) Выразить через H_a энтропию ансамбля Z со следующими вероятностями:

$$Z=\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ p^2 & p\left(1-p\right) & p\left(1-p\right) & \left(1-p\right)^2 \end{bmatrix}.$$

Задача 2.3

Дано произведение ансамблей XY (см. варианты). Вычислить $H(X)$, $H(Y)$, $H(XY)$, $H_Y(X)$, $H_X(Y)$.

Варианты заданий:

1) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_2y_1 & x_2y_2 \\ 0,45 & 0,3 & 0,15 & 0,1 \end{bmatrix}.$

2) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_2y_1 & x_2y_2 \\ 0,15 & 0,05 & 0,6 & 0,2 \end{bmatrix}.$

3) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_2y_1 & x_2y_2 \\ 0,6 & 0,15 & 0,2 & 0,05 \end{bmatrix}.$

4) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ 0,63 & 0,18 & 0,09 & 0,07 & 0,02 & 0,01 \end{bmatrix}.$

5) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ 0,27 & 0,54 & 0,09 & 0,03 & 0,06 & 0,01 \end{bmatrix}.$

6) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ 0,18 & 0,45 & 0,27 & 0,02 & 0,05 & 0,03 \end{bmatrix}.$

7) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ 0,09 & 0,36 & 0,45 & 0,01 & 0,04 & 0,05 \end{bmatrix}.$

8) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ 0,14 & 0,04 & 0,02 & 0,56 & 0,16 & 0,08 \end{bmatrix}.$

9) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ 0,06 & 0,12 & 0,02 & 0,24 & 0,48 & 0,08 \end{bmatrix}.$

10) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ 0,04 & 0,1 & 0,06 & 0,16 & 0,4 & 0,24 \end{bmatrix}.$

11) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ 0,02 & 0,08 & 0,1 & 0,08 & 0,32 & 0,4 \end{bmatrix}.$

12) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ 0{,}49 & 0{,}14 & 0{,}07 & 0{,}21 & 0{,}06 & 0{,}03 \end{bmatrix}.$

13) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ 0{,}21 & 0{,}42 & 0{,}07 & 0{,}09 & 0{,}18 & 0{,}03 \end{bmatrix}.$

14) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ 0{,}14 & 0{,}35 & 0{,}21 & 0{,}06 & 0{,}15 & 0{,}09 \end{bmatrix}.$

15) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ 0{,}07 & 0{,}28 & 0{,}35 & 0{,}03 & 0{,}12 & 0{,}15 \end{bmatrix}.$

16) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ 0{,}28 & 0{,}08 & 0{,}04 & 0{,}42 & 0{,}12 & 0{,}06 \end{bmatrix}.$

17) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ 0{,}12 & 0{,}24 & 0{,}04 & 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}06 \end{bmatrix}.$

18) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ 0{,}08 & 0{,}2 & 0{,}12 & 0{,}12 & 0{,}3 & 0{,}18 \end{bmatrix}.$

19) $XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ 0{,}04 & 0{,}16 & 0{,}2 & 0{,}06 & 0{,}24 & 0{,}3 \end{bmatrix}.$

Задача 2.5

Равномерно распределённая случайная величина X принимает значения из алфавита $\{0000, 0001, ..., 1001\}$ (числа от 0 до 9, записанные с помощью четырёх битов).

Вычислить энтропию каждого бита.

Задача 2.6

Вычислить стационарное (асимптотическое) распределение X_i, энтропию $H(X_i)$, энтропию $H(X_i X_{i+1})$ и условную энтропию $H_{X_i}(X_{i+1})$ марковской цепи (см. варианты).

Варианты заданий:

$$1)\quad \begin{array}{lll} p(a|a)=0.0, & p(a|b)=0.15, & p(a|c)=0.7, \\ p(b|a)=0.9, & p(b|b)=0.4, & p(b|c)=0.3, \\ p(c|a)=0.1, & p(c|b)=0.45, & p(c|c)=0.0. \end{array}$$

$$2)\quad \begin{array}{lll} p(a|a)=0.5, & p(a|b)=0.2, & p(a|c)=0.8, \\ p(b|a)=0.4, & p(b|b)=0.1, & p(b|c)=0.1, \\ p(c|a)=0.1, & p(c|b)=0.7, & p(c|c)=0.1. \end{array}$$

$$3)\quad \begin{array}{lll} p(a|a)=0.1, & p(a|b)=0.1, & p(a|c)=0.4, \\ p(b|a)=0.1, & p(b|b)=0.3, & p(b|c)=0.3, \\ p(c|a)=0.8, & p(c|b)=0.6, & p(c|c)=0.3. \end{array}$$

$$4)\quad \begin{array}{lll} p(a|a)=0.5, & p(a|b)=0.6, & p(a|c)=0.4, \\ p(b|a)=0.35, & p(b|b)=0.2, & p(b|c)=0.1, \\ p(c|a)=0.15, & p(c|b)=0.2, & p(c|c)=0.5. \end{array}$$

$$5)\quad \begin{array}{lll} p(a|a)=0.0, & p(a|b)=0.4, & p(a|c)=0.2, \\ p(b|a)=0.9, & p(b|b)=0.2, & p(b|c)=0.7, \\ p(c|a)=0.1, & p(c|b)=0.4, & p(c|c)=0.1. \end{array}$$

$$6)\quad \begin{array}{lll} p(a|a)=0.1, & p(a|b)=0.1, & p(a|c)=0.4, \\ p(b|a)=0.6, & p(b|b)=0.2, & p(b|c)=0.1, \\ p(c|a)=0.3, & p(c|b)=0.7, & p(c|c)=0.5. \end{array}$$

7)
$$
\begin{array}{llll}
p(a\,|\,a)=\dfrac{5}{9}, & p(a\,|\,b)=\dfrac{5}{9}, & p(a\,|\,c)=\dfrac{3}{9}, & p(a\,|\,d)=\dfrac{3}{9}, \\
p(b\,|\,a)=\dfrac{3}{9}, & p(b\,|\,b)=\dfrac{3}{9}, & p(b\,|\,c)=0, & p(b\,|\,d)=0, \\
p(c\,|\,a)=\dfrac{1}{9}, & p(c\,|\,b)=0, & p(c\,|\,c)=\dfrac{5}{9}, & p(c\,|\,d)=0, \\
p(d\,|\,a)=0, & p(d\,|\,b)=\dfrac{1}{9}, & p(d\,|\,c)=\dfrac{1}{9}, & p(d\,|\,d)=\dfrac{6}{9},
\end{array}
$$

8)
$$
\begin{array}{llll}
p(a\,|\,a)=\dfrac{1}{7}, & p(a\,|\,b)=\dfrac{1}{7}, & p(a\,|\,c)=\dfrac{1}{7}, & p(a\,|\,d)=0, \\
p(b\,|\,a)=\dfrac{2}{7}, & p(b\,|\,b)=\dfrac{2}{7}, & p(b\,|\,c)=\dfrac{1}{7}, & p(b\,|\,d)=\dfrac{4}{7}, \\
p(c\,|\,a)=\dfrac{4}{7}, & p(c\,|\,b)=\dfrac{4}{7}, & p(c\,|\,c)=\dfrac{4}{7}, & p(c\,|\,d)=0, \\
p(d\,|\,a)=0, & p(d\,|\,b)=0, & p(d\,|\,c)=\dfrac{1}{7}, & p(d\,|\,d)=\dfrac{3}{7},
\end{array}
$$

Решение задачи 2.6 (вариант 1)

Изобразим заданную марковскую цепь

$$
\begin{array}{lll}
p(a\,|\,a)=0.0, & p(a\,|\,b)=0.15, & p(a\,|\,c)=0.7, \\
p(b\,|\,a)=0.9, & p(b\,|\,b)=0.4, & p(b\,|\,c)=0.3, \\
p(c\,|\,a)=0.1, & p(c\,|\,b)=0.45, & p(c\,|\,c)=0.0.
\end{array}
$$

в виде конечного автомата:

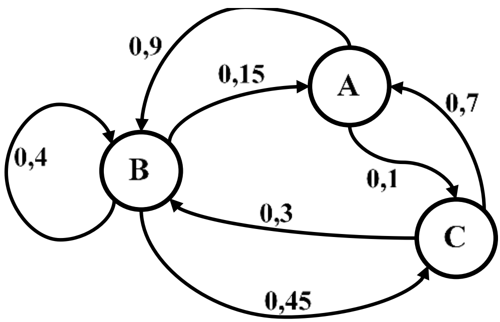

Рис. 1

В соответствие с заданными вероятностями переходов можно записать связь вероятностей состояний марковской цепи на i-м и $(i+1)$-м шагах:

$$p\left(X_{i+1}=s_k\right)=\sum_{s_j\in\{a,b,c\}} p\left(X_i=s_j\right)\cdot p\left(X_{i+1}=s_k \mid X_i=s_j\right),\ \ s_k\in\{a,b,c\},$$

$$p\left(X_{i+1}=a\right)=0{,}15\cdot p\left(X_i=b\right)+0{,}7\cdot p\left(X_i=c\right),$$
$$p\left(X_{i+1}=b\right)=0{,}9\cdot p\left(X_i=a\right)+0{,}4\cdot p\left(X_i=b\right)+0{,}3\cdot p\left(X_i=c\right),$$
$$p\left(X_{i+1}=c\right)=0{,}1\cdot p\left(X_i=a\right)+0{,}45\cdot p\left(X_i=b\right).$$

Поскольку для стационарного (асимптотического) распределения $p\left(X_{i+1}=s_j\right)=p\left(X_i=s_j\right)$ для $s_j\in\{a,b,c\}$, обозначим эти вероятности как p_{s_j} и запишем систему уравнений, дополненную ограничением $\sum_{s_j\in\{a,b,c\}} p_{s_j}=1$:

$$\begin{cases} p_a=0{,}15\cdot p_b+0{,}7\cdot p_c, \\ p_b=0{,}9\cdot p_a+0{,}4\cdot p_b+0{,}3\cdot p_c, \\ p_c=0{,}1\cdot p_a+0{,}45\cdot p_b, \\ p_a+p_b+p_c=1. \end{cases}$$

Решим эту систему (поскольку одно из первых трёх уравнений является избыточным, исключим второе):

$$\begin{cases} 60p_a=9p_b+42p_c, \\ 20p_c=2p_a+9p_b, \\ p_a+p_b+p_c=1. \end{cases} \qquad \begin{cases} 62p_a=62p_c, & \Rightarrow & p_a=p_c, \\ 18p_c=9p_b, & \Rightarrow & p_b=2p_c, \\ 4p_c=1. & \Rightarrow & p_c=0{,}25. \end{cases}$$

Таким образом, значения вероятностей стационарного распределения заданной марковской цепи равны $p_a=0{,}25,\ p_b=0{,}5,\ p_c=0{,}25.$

Энтропия для этого распределения рассчитывается по стандартной формуле:

$$H\left(X_i\right)=\sum_{s_j\in\{a,b,c\}} p\left(X_i=s_j\right)\log_2 p\left(X_i=s_j\right)=\sum_{s_j\in\{a,b,c\}} p_{s_j}\log_2 p_{s_j}=\frac{3}{2}.$$

Для вычисления энтропии $H\left(X_i X_{i+1}\right)$ необходимы совместные вероятности $p\left(X_i=s_j, X_{i+1}=s_k\right)$, которые вычисляются по формуле:

$$p\left(X_i=s_j, X_{i+1}=s_k\right)=p\left(X_i=s_j\right)p\left(X_{i+1}=s_k \mid X_i=s_j\right)=p_{s_j}p\left(s_k \mid s_j\right).$$

Таким образом:

$$p\left(X_i=a, X_{i+1}=a\right)=0,$$

$$p\left(X_i=b, X_{i+1}=a\right)=\frac{3}{40},$$

$$p\left(X_i=c, X_{i+1}=a\right)=\frac{7}{40},$$

$$p\left(X_i=a, X_{i+1}=b\right)=\frac{9}{40},$$

$$p\left(X_i=b, X_{i+1}=b\right)=\frac{8}{40},$$

$$p\left(X_i=c, X_{i+1}=b\right)=\frac{3}{40},$$

$$p\left(X_i=a, X_{i+1}=c\right)=\frac{1}{40},$$

$$p\left(X_i=b, X_{i+1}=c\right)=\frac{9}{40},$$

$$p\left(X_i=c, X_{i+1}=c\right)=0,$$

$$H\left(X_i X_{i+1}\right)=-\left(\frac{3}{40}\log_2\frac{3}{40}+\frac{7}{40}\log_2\frac{7}{40}+\frac{9}{40}\log_2\frac{9}{40}+\right.$$

$$\left.+\frac{8}{40}\log_2\frac{8}{40}+\frac{3}{40}\log_2\frac{3}{40}+\frac{1}{40}\log_2\frac{1}{40}+\frac{9}{40}\log_2\frac{9}{40}\right).$$

Условная энтропия $H_{X_i}\left(X_{i+1}\right)$ может быть найдена двумя способами.

Первый способ:

$$H_{X_i}\left(X_{i+1}\right) = \sum_{s_j \in \{a,b,c\}} p_{s_j} \sum_{s_k \in \{a,b,c\}} p\left(s_k \mid s_j\right) \log_2 p\left(s_k \mid s_j\right).$$

Второй способ:

$$H_{X_i}\left(X_{i+1}\right) = H\left(X_i X_{i+1}\right) - H\left(X_i\right).$$

Задача 2.7

Непрерывная случайная величина X распределена по закону равной вероятности в пределах от x_0 до $x_0 + a$:

$$f\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x < x_0, \\ \dfrac{1}{a}, & x_0 \le x \le x_0 + a, \\ 0, & x > x_0 + a. \end{cases}$$

Найти дифференциальную энтропию этой случайной величины.

Задача 2.8

Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $N\left(0, \sigma^2\right)$.

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Найти дифференциальную энтропию этой случайной величины.

Задача 2.9

Непрерывная случайная величина X распределена по экспоненциальному закону:

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти дифференциальную энтропию этой случайной величины.

Задача 2.10

Сравнить энтропии непрерывных случайных сигналов, распределенных соответственно равномерно на интервале $\left[-\alpha;\alpha\right]$ и нормально, если их дисперсии равны.

Задача 2.11

Сравнить дисперсии непрерывных случайных сигналов, распределенных соответственно равномерно на интервале $\left[-\alpha;\alpha\right]$ и нормально, если их энтропии равны.