1.4 Передача информации по каналу связи

Понятие энтропии, скорости выдачи информации источником, избыточность позволяют характеризовать свойства информационных систем. Однако для сравнения информационных систем такого описания недостаточно. Потребителя интересует не только передача данного количества информации, но и передача его в более короткий срок, не только хранение определенного количества, но и хранение с помощью минимального объема аппаратуры и т.д.

Пусть количество информации, которое передается по каналу связи за время T равно

$$I_T = H_T - H_T(Y/X).$$

Если передача длится T единиц времени, то ***скорость передачи информации*** составит

$$V = \frac{I_T}{T} = \frac{1}{T}(H_T(X) - H_T(X/Y) = H(X) - H(X/Y).$$

Это количество информации, приходящееся в среднем на одно сообщение.

Если в секунду передается n сообщений, то скорость передачи равна

$$V = n(H(X) - H(X/Y)).$$

Пропускная способность канала есть максимально достижимая для данного канала скорость передачи информации

$$c = maxV = n(H(X) - H(X/Y))_{max} = n \cdot I(X,Y)_{max}$$

Скорость передачи может быть технической или информационной.

Под ***технической*** $\boldsymbol{V_T}$ (скорость манипуляции) подразумевается число элементарных сигналов (символов), передаваемых в единицу времени

$$V_T = \frac{1}{\tau} \text{бод}.$$

Информационная скорость или скорость передачи информации определяется средним количеством информации, которое передается в единицу времени

$$V = nH \text{ бит/сек}.$$

Для равновероятных сообщений, составленных из равновероятных взаимно независимых символов

$$V = \frac{1}{\tau} logm.$$

Если символы *не равновероятны*

$$V = -\frac{1}{\tau}\sum_i p_i log_2 p_i.$$

Если символы имеют *разную длительность*

$$V = -\frac{\sum_i p_i log_2 p_i}{\sum_i \tau_i p_i}.$$

Выражение для пропускной способности характеризуется *максимальной энтропией*

$$c_{max} = \frac{H_{max}}{\tau} \text{ бит/сек.}$$

Для двоичного кода

$$c_{max} = \frac{log_2 2}{\tau} = \frac{1}{\tau} \text{ бит/сек.}$$

Пропускная способность является важной характеристикой каналов связи. Возникает вопрос: какова должна быть пропускная способность канала, чтобы информация от источника X к приемнику Y поступала без задержек? Ответ дает теорема Шеннона.

<u>1 Теорема Шеннона</u>

Если имеется источник информации с энтропией $H(X)$ и канал связи с пропускной способностью *c*, то если $c > H(X)$, то всегда можно закодировать достаточно длинное сообщение таким образом, что оно будет передано без задержек. Если $c < H(X)$, то передача информации без задержек невозможна.

В любом реальном канале всегда присутствуют помехи. Однако, если их уровень мал, то вероятность искажения равна нулю и можно считать, что все сигналы передаются неискаженными. В этом случае среднее количество информации, переносимое одним символом

$$I(X,Y) = I(Y,X) = H(X), \quad H_{max} = log_2 m.$$

Следовательно, *пропускная способность канала без помех* за единицу времени

$$c = nlog_2 m,$$

Реальные каналы характеризуются тем, что в них всегда есть помехи. *Пропускная способность дискретного канала с помехами* вычисляется

$$c = n(H(Y) - H(Y\,/\,X))_{max}.$$

где $H(Y) = log_2 m.$

Для дискретного канала с помехами Шеннон дал вторую теорему.

2 Теорема Шеннона

Пусть имеется источник информации *X*, энтропия которого в единицу времени равна $H(X)$, и канал с пропускной способностью c. Если $H(X)>$ с, то при любом кодировании передача сообщений без задержек и искажений невозможна. Если $H(X)<$ с, то любое достаточно длинное сообщение можно всегда закодировать так, что оно будет предано без задержек и искажений с вероятностью сколь угодно близкой к единице.

Пример 1.

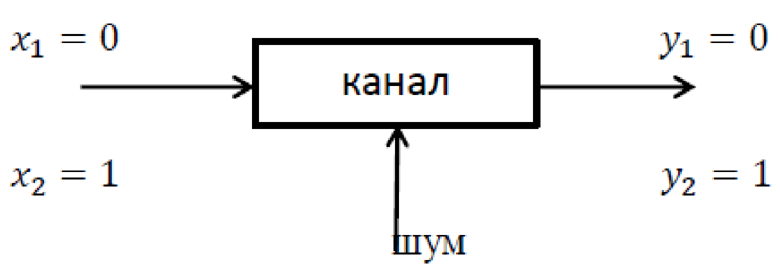
На вход дискретного симметричного канала без памяти поступают двоичные символы $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ с априорными вероятностями $p(x_1) = 0{,}85$ и $p(x_2) = 0{,}15$. Переходные вероятности $p(y_j/x_i)$ в таком канале задаются соотношением

$$p(y_j/x_i) = \begin{cases} p, & j \neq i \\ 1 - p, & j = i \end{cases},$$

где $p = 0{,}05$ - вероятность ошибки. Определить все апостериорные вероятности.

Решение.

Ситуация в канале характеризуется схемой



Так как *p*=0,05, то вероятность правильного приема *q*=1-0,05.

В таком канале каждый кодовый символ может быть принят с ошибочной вероятностью

$$p(y_1/x_2) = p(y_2/x_1) = p = 0{,}05.$$

Правильно переданная информация описывается

$$p(y_1/x_1) = p(y_2/x_2) = q = 0{,}95.$$

По формуле Байеса определим апостериорные вероятности

$$p(x_i/y_j)=\frac{p(x_i)p(y_j/x_i)}{p(y_j)}=\frac{p(x_i)p(y_j/x_i)}{\sum_{i=1}^{N}p(x_i)p(y_j/x_i)}.$$

$$p(x_1/y_1)=\frac{p(x_1)p(y_1/x_1)}{p(x_1)p(y_1/x_1)+p(x_2)p(y_1/x_2)}=\frac{0{,}85\cdot 0{,}95}{0{,}85\cdot 0{,}95+0{,}15\cdot 0{,}05}=$$

$$=0{,}991,$$

$$p(x_1/y_2)=\frac{p(x_1)p(y_2/x_1)}{p(x_1)p(y_2/x_1)+p(x_2)p(y_2/x_2)}=\frac{0{,}85\cdot 0{,}05}{0{,}85\cdot 0{,}05+0{,}15\cdot 0{,}95}=$$

$$=0{,}23,$$

$$p(x_2/y_1)=\frac{p(x_2)p(y_1/x_2)}{p(x_2)p(y_1/x_2)+p(x_1)p(y_1/x_1)}=\frac{0{,}15\cdot 0{,}05}{0{,}15\cdot 0{,}05+0{,}85\cdot 0{,}95}=$$

$$=0{,}009,$$

$$p(x_2/y_2)=\frac{p(x_2)p(y_2/x_2)}{p(x_2)p(y_2/x_2)+p(x_1)p(y_2/x_1)}=\frac{0{,}15\cdot 0{,}95}{0{,}15\cdot 0{,}95+0.85\cdot 0{,}05}=$$

$$=0{,}77.$$

Пример 2.

По каналу связи передается сообщение из ансамбля

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0{,}09 & 0{,}1 & 0{,}22 & 0{,}07 & 0{,}15 & 0{,}17 & 0{,}02 & 0{,}18 \end{pmatrix}$$

Средняя длительность передачи одного элемента сообщения в канале $\tau=0{,}44$ мс. Шум в канале отсутствует. Определить пропускную способность канала и скорость передачи информации.

Решение.

Когда шум в канале отсутствует пропускная способность канала

$$c=V_{\text{T}}logm,\quad V_{\text{T}}=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{0{,}44\cdot 10^{-3}}=2273\ \text{с}^{-1}.$$

Объем алфавита данного сообщения $m=8$

$$c=\frac{1}{0,44\cdot10^{-3}}\cdot log_2 8=6819 \text{ бит/сек}$$

Информационная скорость $V = I(X,Y)\cdot V_T$

$$I(X,Y) = H(X) - H(X/Y)$$

Так как шум в канале отсутствует, то $H(X/Y) = 0$, $I(X,Y) = H(X)$.
Определим энтропию заданного распределения

$$H(X)=\sum_{i=1}^{3} p(x_i)\log_2\frac{1}{p(x_i)}=0,09log_2\frac{1}{0,09}+0,1log_2\frac{1}{0,1}+$$

$$+0,22\cdot log_2\frac{1}{0,22}+0,07log_2\frac{1}{0,07}+0,15log_2\frac{1}{0,15}+0,02log_2\frac{1}{0,02}\cdot$$

$$\cdot0,18log_2\frac{1}{0,18}+0,17log_2\frac{1}{0,17}=2,44 \text{ бит}$$

$$V = 2,44\cdot 2273 = 5546,12 \text{ бит/сек}$$

Пример 3.

Источник вырабатывает три сообщения с вероятностями: $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,2$; $p_3 = 0,7$. Сообщения независимы и передаются равномерным двоичным кодом ($m=2$) с длительностью символов равной 1мс. Определить скорость передачи информации по каналу связи без помех.

Решение.

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i\, log_2 p_i = -(0,1log0,1+0,2log0,2+0,7log0,7) = 1,16 \text{ бит}$$

Для передачи трех сообщений равномерным кодом необходимо два разряда, при этом длительность кодовой комбинации равна $2t$.

Средняя скорость передачи сигнала

$$V_T=\frac{1}{2t}=500 \text{ бод},$$

Скорость передачи информации

$$V = V_T H(X) = 500\cdot 1,16 = 580 \text{ бит/сек}.$$

Пример 4.

По каналу связи передаются сообщения, вероятности которых равны: $p(x_1) = 0{,}1$; $p(x_2) = 0{,}2$; $p(x_3) = 0{,}3$; $p(x_4) = 0{,}4$. Канальная матрица, определяющая потери информации в канале связи

$$P(Y/X) = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 & 0 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}97 & 0{,}02 & 0 \\ 0 & 0{,}01 & 0{,}98 & 0{,}01 \\ 0 & 0 & 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix}$$

Определить:

1)энтропию источника информации $H(X)$;
2) безусловную энтропию приемника информации $H(Y)$;
3) общую условную энтропию $H(Y\,/\,X)$;
4)скорость передачи информации, если время передачи одного символа первичного алфавита t=0,1мс;
5)потери информации в канале связи при передаче 500 символов алфавита;
6)среднее количество принятой информации;
7)пропускную способность канала связи.

Решение.

1) Энтропия источника сообщений
$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\, log_2 p(x_i) = -(0{,}1log_2 0{,}1 + 0{,}2log_2 0{,}2 + 0{,}3log_2 0{,}3 + 0{,}4log0{,}4) = 1{,}8465$ бит
2) Вероятности появления символов на входе приемника рассчитываются по формуле полной вероятности $p(y_j) = \sum_{i=1}^{N} p(x_i, y_j)$; $p(y_1) = 0{,}1 \cdot 0{,}99 + 0{,}2 \cdot 0{,}01 = 0{,}101$

$p(y_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}01 + 0{,}2 \cdot 0{,}97 + 0{,}3 \cdot 0{,}01 = 0{,}198$

$p(y_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}02 + 0{,}3 \cdot 0{,}98 + 0{,}4 \cdot 0{,}01 = 0{,}302$

$p(y_4) = 0{,}3 \cdot 0{,}01 + 0{,}4 \cdot 0{,}99 = 0{,}399$

Проверка: 0,101+0,198+0,302+0,399=1

Энтропия приемника

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{n} p(y_i)\, log_2 p(y_i) = -(\,0{,}101log_2 0{,}101 + 0{,}198log_2 0{,}198 +$$

$$+\, 0{,}302log_2 0{,}302 + 0{,}399log_2 0{,}399) = 1{,}85 \text{ бит}$$

3) Общая условная энтропия

$$H(Y/X) = H(Y/X) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(x_i y_j)\log_2 \frac{1}{p(y_j/x_i)}.$$

$$H(Y/X) = -(0{,}1(0{,}99log_2 0{,}99 + 0{,}01log_2 0{,}01) + 0{,}2(0{,}01log_2 0{,}01 +$$

$$+0{,}97log_2 0{,}97 + 0{,}02log_2 0{,}02) + 0{,}3(0{,}01log_2 0{,}01 + 0{,}98log_2 0{,}98 +$$

$$+0{,}01\ log_2 0{,}01) + 0{,}4(0{,}01log_2 0{,}01 + 0{,}99log_2 0{,}99)) = 0{,}132$$

4) Скорость передачи информации

$$V = V_T(H(X) - H(X/Y) = V_T(H(Y) - H(Y/X) =$$

$$= \frac{1{,}85 - 0{,}132}{0{,}0001} = 17{,}18 \text{ кбит/с;}$$

5) Потери информации в канале связи

$\Delta I = kH(Y/X) = 500 \cdot 0{,}132 = 66$ бит;

6) Среднее количество принятой информации

$I = k\big(H(Y) - H(Y/X)\big) = 500 \cdot (1{,}85 - 0{,}132) = 859$ бит;

7) Пропускная способность канала связи

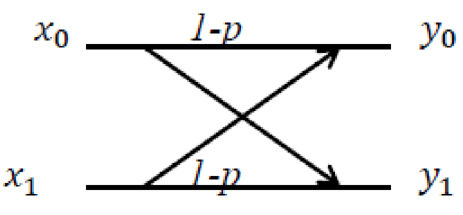
$\text{c} = V\big(log_2 m - H(Y/X)\big) = (2 - 0{,}132)/0{,}0001 = 17{,}18$ кбит.

Пример 5.

Определить скорость передачи по двоичному симметричному каналу связи при $\tau = 0{,}001$с, если шумы в канале вносят ошибки таким образом, что в среднем четыре символа из 100 принимаются неверно (т.е. 1 вместо 0 и наоборот).

Решение.

Двоично симметричный канал можно представить схемой



Вероятность ошибки $p = \frac{4}{100}$

Составим таблицу вероятностей

$$p(x_0) = 0{,}5, \quad p(y_0/x_0) = 0{,}96$$

$$p(x_1) = 0{,}5, \quad p(y_1/x_0) = 0{,}04$$

$$p(y_0) = 0{,}5, \quad p(y_0/x_1) = 0{,}04$$

$$p(y_1) = 0{,}5, \quad p(y_1/x_1) = 0{,}96$$

Пропускная способность двоично симметричного канала

$$\text{c} = \frac{1}{\tau}(1 + (1-p)log_2(1-p) + plog_2p) = 10^3(1 + 0{,}96log_2 0{,}96 +$$

$$+0{,}04log_2 0{,}04) = 0{,}76 \text{ кбит/с},$$

Задачи для самостоятельного решения

1. По каналу связи передается сообщение из ансамбля:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_3 \\ 0{,}34 & 0{,}46 & 0{,}16 & 0{,}04 \end{pmatrix}$$

Средняя длительность передачи одного элемента сообщения в канале $\tau = 0{,}2$мс. Шум в канале отсутствует. Определить пропускную способность канала и скорость передачи информации.

2. Вероятности появления символов источника алфавита $p(x_1) = 0{,}5$, $p(x_2) = 0{,}25$, $p(x_3) = 0{,}125$, $p(x_4) = 0{,}125$. Между соседними символами имеются корреляционные связи, которые описываются матрицей вероятностей

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{16} & \frac{3}{16} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Требуется определить избыточность источника при статистической независимости символов и избыточность при зависимости символов.

3. Первичный алфавит состоит из трех знаков с вероятностями $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}7$, $p_3 = 0{,}1$. Для передачи по каналу без помех использовался равномерный двоичный код. Частота тактового генератора 500 Гц. Какова пропускная способность канала и скорость передачи?

4. По каналу связи передается ансамбль трех символов с длительностью $\tau = 0{,}01$сек и частотой следования $F = \frac{1}{\tau}$. Источник сигналов имеет матрицу безусловных вероятностей

$$\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Н

Канал связи характеризуется при $p_1 = 0{,}01$, $p_2 = 0{,}02$, $p_3 = 0{,}97$ матрицей условных вероятностей

$$P(Y/X) = \begin{pmatrix} p_3 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_3 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_3 \end{pmatrix}$$

Определить пропускную способность канала. Сравнить производительность источника и пропускную способность канала.

5.По двоичному симметричному каналу связи с помехами передаются два символа с вероятностями $p(x_1) = 0{,}75$ и $p(x_2) = 0{,}25$. Из-за наличия помех вероятность правильного приема каждого из сигналов уменьшается до 0,875. Длительность одного сигнала $\tau = 0{,}1$ сек. Требуется определить:

1)производительность и избыточность источника;

2)скорость передачи информации и пропускную способность канала связи.

6.Для передачи сообщений используется код, состоящий из трех символов, вероятности появления которых равны 0.8, 0.1 и 0.1. Корреляция между символами отсутствует. Определить избыточность кода.

7.Определить пропускную способность симметричного канала с матрицей условных вероятностей

$$P(Y/X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Приложение 1. Определения

Постоянный симметричный канал без памяти определяется как дискретный канал, в котором каждый переданный кодовый символ может быть принят ошибочно с фиксированной вероятностью р и правильно с вероятностью 1-р, причём в случае ошибки вместо переданного символа может быть с равной вероятностью принят любой другой символ. Термин “без памяти” означает, что вероятность ошибочного приёма символа не зависит от предистории, т.е. от того, какие символы передавались до него и как они были приняты. Вероятности переходов в двоичном симметричном канале схематически можно представить в виде графа (рис.12.1).

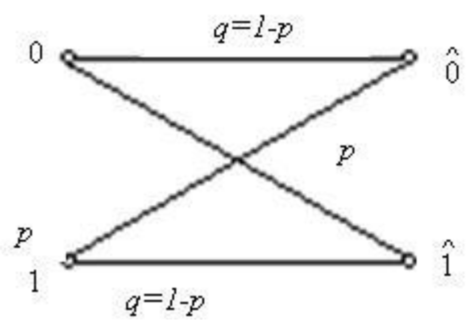


Рисунок 12.1- Переходные вероятности в двоичном симметричном канале

Постоянный симметричный канал без памяти со стиранием отличается от предыдущего канала тем, что алфавит на выходе канала содержит дополнительный (m+1)-й символ, который часто обозначают знаком “?”. Этот символ появляется тогда, когда демодулятор не может надёжно опознать переданный символ. Вероятность такого отказа от решения или стирания символа p_c в данной модели постоянна и не зависит от передаваемого символа. За счёт введения стирания удаётся значительно снизить вероятность ошибки, иногда её даже считают равной нулю. На рис.12.2 показаны вероятности переходов в такой модели.

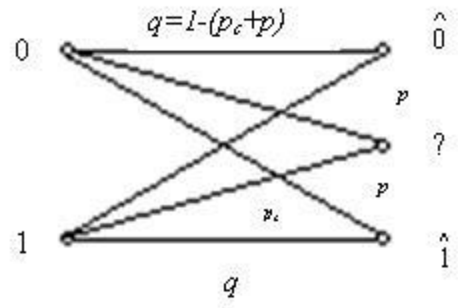


Рисунок 12.2.-Переходные вероятности в двоичном симметричном канале со стиранием

Несимметричный канал без памяти характеризуется тем, что ошибки в нём возникают независимо друг от друга, однако вероятности ошибок зависят от того, какой символ передаётся. Так, в двоичном несимметричном канале вероятность приёма символа 1 при передаче символа 0 не равна вероятности приёма 0 при передаче 1.

Простейшей моделью **двоичного канала с памятью** является **марковская модель**, определяемая матрицей переходных вероятностей:

$$P = \begin{bmatrix} 1-p_1 & p_1 \\ p_2 & 1-p_2 \end{bmatrix} \qquad (12.1)$$

где p_1—условная вероятность принять (i+1)-й символ ошибочно, если предыдущий принят правильно; $(1-p_1)$-условная вероятность принять (i+1)-й символ правильно, если предыдущий символ принят правильно; p_2- условная вероятность принять (i+1)-й символ ошибочно, если предыдущий принят ошибочно; $(1-p_2)$-условная вероятность принять (i+1)-й символ правильно, если предыдущий символ принят ошибочно.

Откуда

$$p = \frac{P_1}{1+P_1-P_2}$$